Innopolis Olympiad in Mathematics for University Students
2024 April 25-28

Задачи 1-4 подразумевают краткий числовой ответ, а задачи 5-10 – обоснованное решение.

Tasks 1-4 require a short numerical answer, and tasks 5-10 require a detailed solution.

Система оценивания / Task score

1. Первичная оценка решения каждой задачи выставляется по 5-балльной шкале согласно критериям оценивания. Если к задаче нужен только краткий ответ, то по ней выставляется либо 0 баллов, либо 5.
2. Для каждой задачи вычисляется средний балл (M) по результатам ее решения всеми участниками.
3. Весовой коэффициент (K) каждой задачи вычисляется по формуле
$$K = 3 - 0.5 \cdot M$$
4. Балл каждого участника за каждую задачу умножается на весовой коэффициент этой задачи.
5. Баллы, набранные участником, суммируются с последующим округлением до ближайшего целого в бо́льшую сторону.

1. Pre-score of the solution to each task is set on a 5-point scale according to the criteria. If the task requires short answer then pre-score will be 0 or 5 points.
2. An average score (M) is calculated based on the results of all participants for each task.
3. The weighting factor (K) of each task is calculated using formula
$$K = 3 - 0.5 \cdot M$$
4. Each participant's score for each task is multiplied by the weighting factor of that task.
5. The points scored by the participant are summed and then rounded up to the nearest integer.

Task 1. Дана последовательность x_n, задаваемая для $n \geq 0$ рекуррентным соотношением $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ при $x_0 = 0$, $x_1 = 2$. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Округлите ответ до сотых. Если предела нет, либо он бесконечен, запишите в ответ число 0.

Given a sequence x_n defined for $n \geq 0$ by the recurrent relation $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ while $x_0 = 0$, $x_1 = 2$. Calculate

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Round your answer to two decimal places. If there is no limit or it is infinite, write down the number 0 as an answer.

Answer: 2

Solution (RUS). Докажем, что $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 3$ при $n \geq 3$. Действительно,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n + 2x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{2x_{n-1}}{x_n} < 1 + 2 = 3,$$

что следует из $\frac{x_n}{x_{n-1}} > 1$ для $n \geq 3$. Доказано.

Поскольку последовательность $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ возрастает и ограничена, она имеет предел, а поскольку $x_{n+1} > x_n > 0$ (при $n > 1$), этот предел не меньше 1 – пусть он равен $L \geq 1$. Тогда

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + 2x_{n-1}}{x_n} = 1 + 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{2}{L},$$

откуда $L = 2$.

Solution (ENG). Lets prove that $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 3$ for $n \geq 3$. Really,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n + 2x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{2x_{n-1}}{x_n} < 1 + 2 = 3,$$

which follows from $\frac{x_n}{x_{n-1}} > 1$ for $n \geq 3$. Proven.

Since the sequence $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ is increasing and bounded, it has a limit, and since $x_{n+1} > x_n > 0$ (for $n > 1$), the limit is not less than 1 – let it be equal to $L \geq 1$. Then

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + 2x_{n-1}}{x_n} = 1 + 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{2}{L},$$

thus $L = 2$.

Task 2. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\int_0^x \operatorname{sgn}\left[\sin\ln\frac{1}{t}\right]\,dt = -\frac{e^{6\pi}}{1+e^{\pi}}$$

Здесь $[a]$ – целая часть a (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a), $\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & a>0 \\ 0, & a=0 \\ -1, & a<0 \end{cases}$

Округлите ответ до сотых. Если уравнение не имеет корней, запишите в ответ число 0.

Find the smallest positive root of the equation

$$\int_0^x \operatorname{sgn}\left[\sin\ln\frac{1}{t}\right]\,dt = -\frac{e^{6\pi}}{1+e^{\pi}}$$

Here $[a]$ is the integer part of a (i.e. the largest integer not exceeding a), $\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & a>0 \\ 0, & a=0 \\ -1, & a<0 \end{cases}$

Round your answer to two decimal places. If the equation has no roots, write down the number 0 as an answer.

Answer: 6635624

Solution (RUS). Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\operatorname{sgn}\left[\sin\ln\frac{1}{t}\right] = \operatorname{sgn}[-\sin\ln t] = -\operatorname{sgn}\big([\sin\ln t]+1\big)$$

Поскольку $[\sin\ln t]+1 \geq 0$, причем $[\sin\ln t]+1 > 0$ только при $\sin\ln t \geq 0$, подынтегральное выражение будет отлично от нуля только при $e^{2\pi k} < t < e^{\pi+2\pi k}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Итак,

$$\int_0^x \operatorname{sgn}\left[\sin\ln\frac{1}{t}\right]\,dt = -\sum_{k=-\infty}^{k'} e^{2\pi k}\cdot(e^{\pi}-1) + \int_{e^{\pi+2\pi k'}}^{x} \operatorname{sgn}\left[\sin\ln\frac{1}{t}\right]\,dt,$$

где k' – наибольшее целое число, удовлетворяющее $e^{\pi+2\pi k'} \leq x$.

$$-\sum_{k=-\infty}^{-1} e^{2\pi k}\cdot(e^{\pi}-1) = -(e^{\pi}-1)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k} = -\frac{1}{1+e^{\pi}} > -\frac{e^{6\pi}}{1+e^{\pi}};$$

$$-\sum_{k=0}^{k'} e^{2\pi k}\cdot(e^{\pi}-1) = -(e^{\pi}-1)\cdot\frac{e^{2\pi(k'+1)}-1}{e^{2\pi}-1} = -\frac{e^{2\pi(k'+1)}-1}{1+e^{\pi}}.$$

Осталось заметить, что при $k'=2$ получим

$$-\sum_{k=-\infty}^{k'} e^{2\pi k}\cdot(e^{\pi}-1) = -\frac{1}{1+e^{\pi}} - \frac{e^{6\pi}-1}{1+e^{\pi}} = -\frac{e^{6\pi}}{1+e^{\pi}},$$

откуда $e^{5\pi} \leq x \leq e^{6\pi}$, и искомое наименьшее x равно $e^{5\pi} \approx 6635623.9993 \approx 6635624$.

Solution (ENG). Lets transform the integrand:

$$\operatorname{sgn}\left[\sin\ln\frac{1}{t}\right] = \operatorname{sgn}[-\sin\ln t] = -\operatorname{sgn}\big([\sin\ln t]+1\big)$$

Since $[\sin \ln t] + 1 \geq 0$, and $[\sin \ln t] + 1 > 0$ only for $\sin \ln t \geq 0$, the integrand will be non-zero only for $e^{2\pi k} < t < e^{\pi + 2\pi k}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

So,

$$\int\limits_0^x \operatorname{sgn}\left[\sin \ln \frac{1}{t}\right] dt = -\sum_{k=-\infty}^{k'} e^{2\pi k} \cdot (e^{\pi} - 1) + \int\limits_{e^{\pi+2\pi k'}}^{x} \operatorname{sgn}\left[\sin \ln \frac{1}{t}\right] dt,$$

where k' is the largest integer satisfying $e^{\pi + 2\pi k'} \leq x$.

$$-\sum_{k=-\infty}^{-1} e^{2\pi k} \cdot (e^{\pi} - 1) = -(e^{\pi} - 1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k} = -\frac{1}{1 + e^{\pi}} > -\frac{e^{6\pi}}{1 + e^{\pi}};$$

$$-\sum_{k=0}^{k'} e^{2\pi k} \cdot (e^{\pi} - 1) = -(e^{\pi} - 1) \cdot \frac{e^{2\pi(k'+1)} - 1}{e^{2\pi} - 1} = -\frac{e^{2\pi(k'+1)} - 1}{1 + e^{\pi}}.$$

It remains to note that for $k' = 2$ we get

$$-\sum_{k=-\infty}^{k'} e^{2\pi k} \cdot (e^{\pi} - 1) = -\frac{1}{1 + e^{\pi}} - \frac{e^{6\pi} - 1}{1 + e^{\pi}} = -\frac{e^{6\pi}}{1 + e^{\pi}},$$

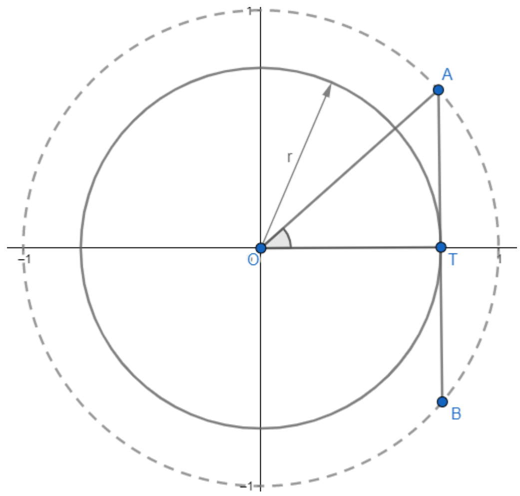
thus $e^{5\pi} \leq x \leq e^{6\pi}$, and the required smallest x is equal to $e^{5\pi} \approx 6635623.9993 \approx 6635624$.

Task 3. Рассматривается модель геометрии Лобачевского в диске евклидова радиуса 1. При каком наименьшем натуральном $n \geq 3$ можно описать правильный гиперболический n-угольник около гиперболической окружности гиперболического радиуса 2? Если таких натуральных n не существует, запишите в ответ число 0.

Consider a disk of Euclidean radius 1 as a model of Lobachevskian geometry. Calculate the smallest integer $n \geq 3$ such that there is a regular hyperbolic n-gon with hyperbolic circle of hyperbolic radius 2 inscribed. If there are no such integer n, write down the number 0 as an answer.

Answer: 12

Solution (RUS). Рассмотрим модель Клейна: в ней гиперболические прямые, на которых лежат стороны требуемого n-угольника, – это хорды окружности, ограничивающей модель, а гиперболические окружности – это либо эллипсы, либо окружности, центры которых совпадают с центром модели. Ввиду инвариантности относительно движений, достаточно рассмотреть окружность с центром в центре O модели, имеющую гиперболический радиус 2 и евклидов радиус $r < 1$. В предельном случае вершины многоугольника лежат на границе модели, и ввиду того, что поворот вокруг центра модели – это движение, имеем



Здесь AB – предельное положение стороны требуемого n-угольника, тогда $\angle AOT = \frac{\pi}{n}$, откуда $\cos\frac{\pi}{n} \geq r \;\Rightarrow\; n \geq \frac{\pi}{\arccos r}$. Осталось вычислить евклидов радиус r, зная гиперболический радиус 2. Введя декартовы координаты как показано на рисунке выше и используя метрику в модели Клейна с радиусом 1

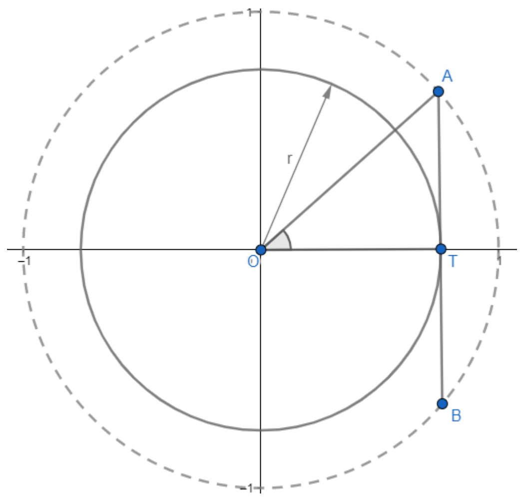
$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 - (xdy - ydx)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

получим, интегрируя вдоль OT,

$$2 = \int\limits_0^r ds = \int\limits_0^r \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r},$$

откуда $r = \frac{e^4-1}{e^4+1} = \operatorname{th} 2$. Тогда $n \geq \frac{\pi}{\arccos \operatorname{th} 2} \approx 11.67$, т.е. $n \geq 12$.

Solution (ENG). Lets consider the Klein model: its hyperbolic lines (which the sides of the required n-gon lie on) are the chords of the circle bounding the model, and the hyperbolic circles are either ellipses or circles whose centers coincide with the center of the model. Due to invariance under motion, it is sufficient to consider a circle centered at the center of the O model, having a hyperbolic radius of 2 and a Euclidean radius of $r < 1$. In the limiting case, the vertices of the polygon lie on the boundary of the model, and since rotation around the center of the model is a movement, we have



Here AB is the limit position of the side of the required n-gon, then $\angle AOT = \frac{\pi}{n}$, thus $\cos\frac{\pi}{n} \geq r \;\Rightarrow\; n \geq \frac{\pi}{\arccos r}$. It remains to calculate the Euclidean radius r, knowing the hyperbolic radius 2. By establishing Cartesian coordinates as shown in the figure above and using the metric in the Klein model with a radius of 1

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 - (xdy - ydx)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

By integrating along OT we obtain

$$2 = \int\limits_0^r ds = \int\limits_0^r \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r},$$

thus $r = \frac{e^4-1}{e^4+1} = \operatorname{th} 2$. Then $n \geq \frac{\pi}{\arccos \operatorname{th} 2} \approx 11.67$, i.e. $n \geq 12$.

Task 4. Точечная муха упала в случайную точку круглой ловушки $\{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$, выход из которой есть только в интервале $\{(r,\varphi) \mid 0.66 < r < 0.67,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\}$. Попав в ловушку, муха немедленно начала движение согласно закону

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \cos\dfrac{\pi}{r} \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что муха выберется из ловушки. Округлите ответ до сотых.

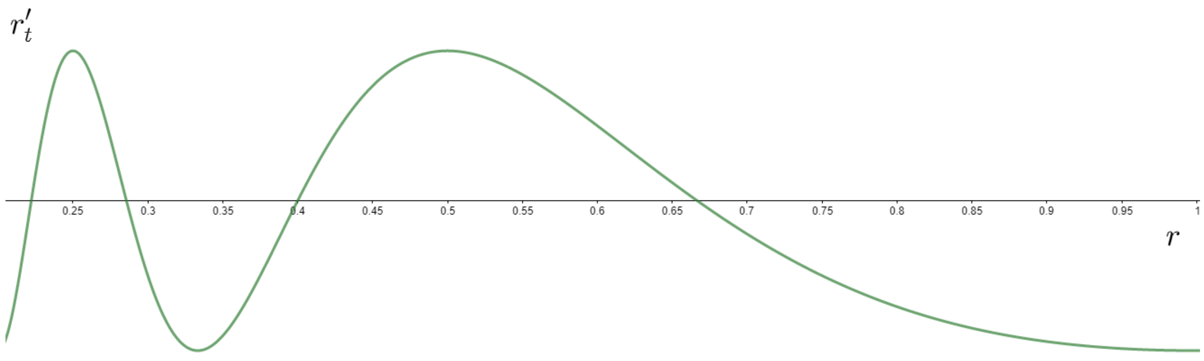
A point fly fell into a random point of a circular trap $\{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$, the exit from which is only in the interval $\{(r,\varphi) \mid 0.66 < r < 0.67,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\}$. Having fallen into the trap, the fly immediately began to move according to the equations

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \cos\dfrac{\pi}{r} \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$$

Find the probability for the fly to escape the trap. Round your answer to two decimal places.

Answer: 0.6

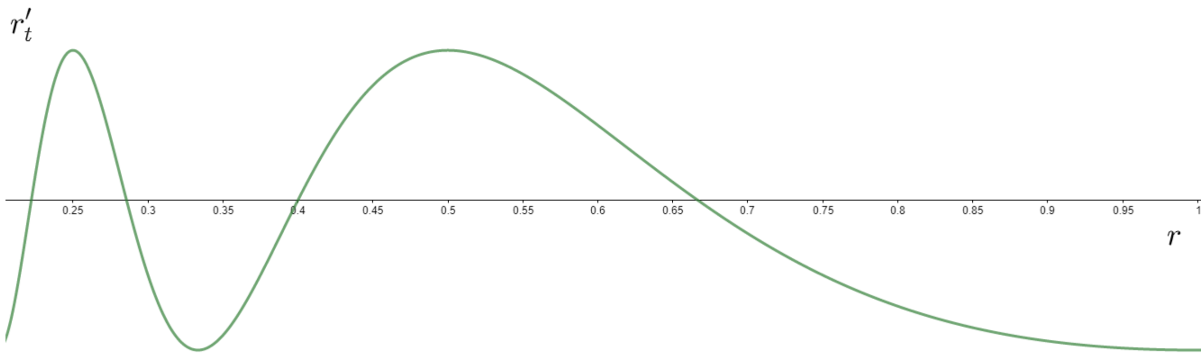
Solution (RUS). Траектория мухи – кривая, задаваемая в полярных координатах следующим образом: $(r(t,r_0), \varphi_0 + t)$, где (r_0, φ_0) – точка, в которую попала муха в момент времени $t = 0$, и $r(t,r_0)$ – решение уравнения $\frac{dr}{dt} = \cos\frac{\pi}{r}$, где $r(0,r_0) = r_0$. При этом $r(t, \frac{2}{2n+1})$ – решение при любом натуральном n, т.к. $\cos\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\right) = 0$. В силу теоремы о единственности решения задачи Коши, если $r_0 \in \left(\frac{2}{2(n+1)+1}; \frac{2}{2n+1}\right)$, то $r(t,r_0) \in \left(\frac{2}{2(n+1)+1}; \frac{2}{2n+1}\right)$. Изобразим зависимость r'_t от r:



Итак, при $r_0 < 0.4$ получим $r(t,r_0) < 0.4$ – в этом случае муха не выберется из ловушки. Если $0.4 < r_0 < \frac{2}{3}$, то $r'_t > 0$ и r будет возрастать, пока не достигнет $\frac{2}{3} \in (0.66; 0.67)$, а при $r_0 > \frac{2}{3}$ получим $r'_t < 0$ и r будет убывать до $\frac{2}{3}$ – в обоих случаях r будет стремиться к $\frac{2}{3}$, т.е. попадет в $\{(r,\varphi) \mid 0.66 < r < 0.67,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\}$ бесконечно много раз – значит, муха покинет ловушку.

Осталось только заметить, что $r_0 \in (0.4; 1)$ с вероятностью $1 - 0.4 = 0.6$. Поскольку в условии не уточняется, что значит «случайная точка», ответ 0.84 также засчитывается верным (это площадь кольца с радиусами 0.4 и 1).

Solution (ENG). The trajectory of a fly is a curve specified in polar coordinates as follows: $(r(t,r_0), \varphi_0 + t)$, where (r_0, φ_0) is the point the fly fell to at $t = 0$, and $r(t,r_0)$ is a solution to the equation $\frac{dr}{dt} = \cos\frac{\pi}{r}$, where $r(0,r_0) = r_0$. Moreover, $r(t, \frac{2}{2n+1})$ is a solution for any positive integer n, since $\cos\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\right) = 0$. By the theorem on the uniqueness of the solution to the Cauchy problem, if $r_0 \in \left(\frac{2}{2(n+1)+1}; \frac{2}{2n+1}\right)$, then $r(t,r_0) \in \left(\frac{2}{2(n+1)+1}; \frac{2}{2n+1}\right)$. Lets depict the dependence of r'_t on r:



So, for $r_0 < 0.4$ we get $r(t, r_0) < 0.4$ – in this case the fly will not get out of the trap. If $0.4 < r_0 < \frac{2}{3}$, then $r'_t > 0$ and r will increase until it reaches $\frac{2}{3} \in (0.66; 0.67)$, and if $r_0 > \frac{2}{3}$ we get $r'_t < 0$ and r will decrease to $\frac{2}{3}$ – in both cases r will tend to $\frac{2}{3}$, i.e. hits $\{(r, \varphi) \mid 0.66 < r < 0.67,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\}$ infinitely many times which means the fly will leave the trap.

It remains only to note that $r_0 \in (0.4; 1)$ with the probability $1 - 0.4 = 0.6$. Since the task's formulation does not specify what «random point» means, the answer 0.84 is also considered correct (this is the area of the ring with radii 0.4 and 1).

Task 5. На отрезке $[0, 1]$ заданы измеримые по Лебегу множества $A_1, A_2, \ldots, A_{2024}$, сумма мер которых не меньше x. Найдите наибольшее значение x, при котором мера $\bigcap\limits_{i=1}^{2024} A_i$ может быть равна нулю. Обоснуйте свой ответ.

On the segment $[0, 1]$ there are Lebesque-measurable sets $A_1, A_2, \ldots, A_{2024}$ with the sum of their measures being greater than or equal to x. Find the largest value of x for which the measure $\bigcap\limits_{i=1}^{2024} A_i$ can be equal to zero. Explain your answer.

Answer: 2023

Solution (RUS). Покажем, что $x \le 2023$. Пусть $\overline{A}_i = [0; 1] \setminus A_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2024$. Тогда $\mu(\overline{A}_i) = 1 - \mu(A_i)$, и ввиду $[0; 1] \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{2024} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{2024} \overline{A}_i$ имеем

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{2024} A_i\Big) = 1 - \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{2024} \overline{A}_i\Big) \ge 1 - \sum_{i=1}^{2024} \mu(\overline{A}_i) = 1 - 2024 + \sum_{i=1}^{2024} \mu(A_i) \ge x - 2023$$

Если $x > 2023$, то $\mu\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{2024} A_i\Big) > 0$ – противоречие с требованием задачи.

Приведем пример набора $\{A_i\}_{i=1}^{2024}$ с суммой мер 2023 и нулевой мерой пересечения: пусть $A_i = [0; 1] \setminus [\frac{i-1}{2024}; \frac{i}{2024}]$, тогда $\mu(A_i) = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$, $\sum\limits_{i=1}^{2024} \mu(A_i) = 2023$, и в то же время $\bigcap\limits_{i=1}^{2024} A_i = \emptyset$ и $\mu\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{2024} A_i\Big) = 0$.

Критерии оценивания:

- верная оценка ($x \le 2023$) приведена и обоснована: $+3$ первичных балла;
- верный пример, подтверждающий оценку: $+2$ первичных балла.

Solution (ENG). Lets show that $x \le 2023$. Let $\overline{A}_i = [0;1] \setminus A_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2024$. Then $\mu(\overline{A}_i) = 1 - \mu(A_i)$, and due to $[0;1] \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{2024} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{2024} \overline{A}_i$ we have

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{2024} A_i\Big) = 1 - \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{2024} \overline{A}_i\Big) \ge 1 - \sum_{i=1}^{2024} \mu(\overline{A}_i) = 1 - 2024 + \sum_{i=1}^{2024} \mu(A_i) \ge x - 2023$$

If $x > 2023$, then $\mu\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{2024} A_i\Big) > 0$ is a contradiction with the task's requirements.

Lets give an example of a set $\{A_i\}_{i=1}^{2024}$ with a sum of measures 2023 and a zero intersection measure: let $A_i = [0;1] \setminus [\frac{i-1}{2024}; \frac{i}{2024}]$, then $\mu(A_i) = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$, $\sum\limits_{i=1}^{2024} \mu(A_i) = 2023$, and at the same time $\bigcap\limits_{i=1}^{2024} A_i = \emptyset$ and $\mu\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{2024} A_i\Big) = 0$.

Criteria:

- correct estimate ($x \le 2023$) is given and proven: $+3$ pre-points;
- correct example that confirms the estimate: $+2$ pre-points.

Task 6. Существует ли такое дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$, что для любой точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ задача Коши

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет ровно один миллион решений? Обоснуйте свой ответ.

Is there a first order differential equation $F(x, y, y') = 0$ such that for any point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ the Cauchy problem

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

has exactly one million solutions? Explain your answer.

Solution (RUS). Рассмотрим уравнение

$$\prod_{k=1}^{10^6} (y' - ky) = 0$$

Его наиболее общее решение – это $y = c \cdot e^{kx}$, где $x \in \mathbb{R}$ – вещественная переменная, $c \in \mathbb{R}$ – вещественный параметр, а k – целое число из $1, 2, \ldots, 10^6$. Для каждого из этих k единственное решение указанной ранее задачи Коши имеет вид $y = \frac{y_0}{e^{kx_0}} \cdot e^{kx} = y_0 \cdot e^{k(x - x_0)}$ – таким образом, эта задача Коши имеет ровно один миллион решений.

Критерии оценивания:

- приведены верный ответ и плодотворная идея решения: 2 первичных балла;
- решение верно за исключением остутствия проверки того, что решения задачи Коши «не склеиваются»: 3 первичных балла;

- приведено полностью верное решение и дан верный ответ: 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Consider the equation

$$\prod_{k=1}^{10^6}(y' - ky) = 0$$

Its most general solution is $y = c \cdot e^{kx}$, where $x \in \mathbb{R}$ is a real variable, $c \in \mathbb{R}$ is a real parameter, and k is an integer from $1, 2, \ldots, 10^6$. For each of these k, the unique solution to the previously mentioned Cauchy problem has the form $y = \frac{y_0}{e^{kx_0}} \cdot e^{kx} = y_0 \cdot e^{k(x-x_0)}$ – thus, the Cauchy problem has exactly one million solutions.

Criteria:

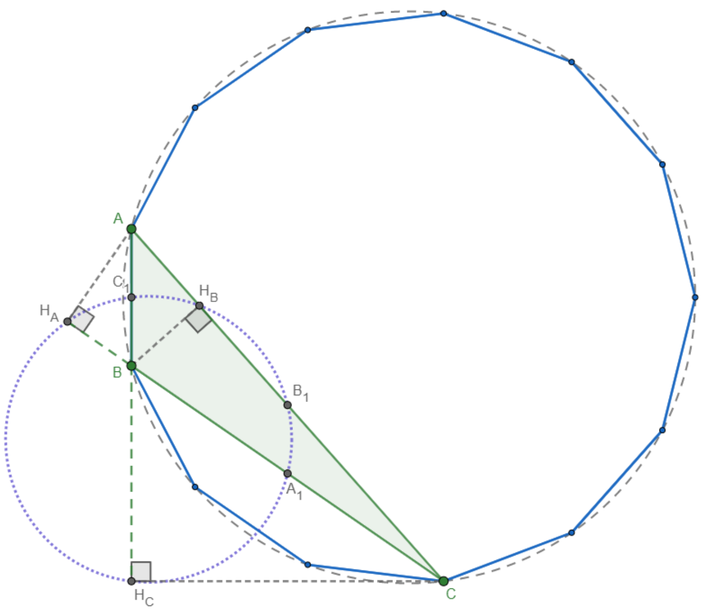
- correct answer and fruitful idea are given: 2 pre-points;
- the solution is correct except for the lack of verification that the solutions to the Cauchy problem do not «stick together»: 3 pre-points;
- correct solution and correct answer are given: 5 pre-points.

Task 7. Углы треугольника составляют геометрическую прогрессию с натуральным знаменателем. Докажите, что середины сторон и основания высот этого треугольника являются вершинами правильного многоугольника.

Angles of a triangle form a geometric progression with its common ratio being a positive integer. Prove that the midpoints of the sides and the bases of the altitudes of the triangle are the vertices of a regular polygon.

Solution (RUS). Прежде всего вспомним, что середины сторон треугольника и основания его высот лежат на окружности Эйлера. Кроме того, середины сторон треугольника являются вершинами треугольника, подобного исходному.

Пусть знаменатель упомянутой прогрессии равен k. Заметим, что вершины данного треугольника совпадают с (тремя) вершинами правильного $(1 + k + k^2)$-угольника, что очевидно после рассмотрения описанной окружности и деления ее на $(1 + k + k^2)$ равных дуг (на рисунке показан пример для $k = 3$):



Точки A_1, B_1, C_1 – середины соответствующих сторон $\triangle ABC$, точки H_A, H_B, H_C – основания его высот. Осталось доказать, что упомянутые точки совпадают с вершинами правильного многоугольника (очевидно, вписанного в окружность Эйлера): действительно, $\angle C_1A_1H_A = \angle BCA = \frac{\pi}{1+k+k^2}$, $\angle A_1C_1H_C = \angle BAC = \frac{\pi k}{1+k+k^2}$, и, учитывая, что высоты $\triangle ABC$ – это биссектрисы $\triangle H_AH_BH_C$, получаем требуемое: точки $A_1, B_1, C_1, H_A, H_B, H_C$ делят окружность Эйлера на дуги, градусные меры которых кратны $\frac{2\pi}{1+k+k^2}$, т.е. упомянутые точки совпадают с вершинами правильного $(1+k+k^2)$-угольника, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- достигнут значительный прогресс (например, показано, что середины сторон и основания высот треугольника лежат на окружности): 3 первичных балла;
- приведено полностью верное доказательство: 5 первичных баллов.

Solution (ENG). First of all, remember that the midpoints of the sides of a triangle and the bases of its altitudes lie on the Euler circle. In addition, the midpoints of the sides of the triangle are the vertices of a triangle similar to the original one.

Let the common ratio of the mentioned progression be equal to k. Note that the vertices of the triangle coincide with the (three) vertices of a regular $(1+k+k^2)$-gon, which is obvious after considering the circumscribed circle and dividing it into $(1+k+k^2)$ equal arcs (see the figure on the picture above which shows an example for $k=3$). Points A_1, B_1, C_1 on the picture are the midpoints of the corresponding sides of $\triangle ABC$, points H_A, H_B, H_C are the bases of its heights. It remains to prove that the mentioned points coincide with the vertices of a regular polygon (obviously inscribed in the Euler circle): indeed, $\angle C_1A_1H_A = \angle BCA = \frac{\pi}{1+k+k^2}$, $\angle A_1C_1H_C = \angle BAC = \frac{\pi k}{1+k+k^2}$, and after taking into account that the heights of $\triangle ABC$ are bisectors of $\triangle H_AH_BH_C$, we obtain the required: points $A_1, B_1, C_1, H_A, H_B, H_C$ divide the Euler circle into arcs whose degree measures are multiples of $\frac{2\pi}{1+k+k^2}$, i.e. the mentioned points coincide with the vertices of a regular $(1+k+k^2)$-gon, which was to be proven.

Criteria:

- significant progress has been made (for example, it is shown that the midpoints of the sides and the bases of the altitudes of a triangle lie on a circle): 3 pre-points;
- a completely correct proof is given: 5 pre-points.

Task 8. Каждый элемент главной диагонали матрицы $n \times n$ (n нечетно) – переменная x. Двое игроков по очереди заполняют остальные элементы числами $1, 2, 3, \ldots, (n^2-n)$ без повторений. Цель второго игрока – добиться того, чтобы определитель получившейся матрицы (т.е. многочлен n-й степени от x) имел целочисленный корень, а цель первого игрока – помешать второму.

У кого из игроков есть выигрышная стратегия? Обоснуйте свой ответ.

Each element on the main diagonal of a matrix $n \times n$ (n is odd) is a variable x. Two players take turns filling in the remaining elements with the numbers $1, 2, 3, \ldots, (n^2-n)$ without repetition. The goal of the second player is to ensure that the determinant of the resulting matrix (i.e. a polynomial of the n-th degree in x) has an integer root, and the goal of the first player is to interfere with the second one.

Which player has a winning strategy? Explain your answer.

Solution (RUS). Приведем выигрышную стратегию для второго игрока: после того, как первый поставил в некоторый столбец число t, второй ставит в любую строку этого же столбца число $(n^2 - n + 1 - t)$ – тогда в результате сумма всех элементов каждого столбца будет равна $x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2}$. Ввиду свойств определителя, полученный определитель будет равен

$$\begin{vmatrix} x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2} & x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2} & x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2} & \dots & x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

который, очевидно, делится на $x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2}$, т.е. целое число $-(n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2}$ является корнем полученного многочлена.

Критерии оценивания:

- достигнут значительный прогресс в решении: 3 первичных балла;
- приведены полностью верные решение и ответ: 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Lets show a winning strategy for the second player: after the first player has placed the number t in a certain column, the second player places the number $(n^2 - n + 1 - t)$ in any row of the same column – then the sum of all elements of each column will be equal to $x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2}$. Due to the properties of the determinant, the resulting determinant will be equal to

$$\begin{vmatrix} x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2} & x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2} & x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2} & \dots & x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

which is obviously divisible by $x + (n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2}$, i.e. the integer $-(n^2 - n + 1)\binom{n-1}{2}$ is the root of the resulting polynomial.

Criteria:

- significant progress has been made: 3 pre-points;
- correct reasoning and correct answer are given: 5 pre-points.

Task 9. Пусть $\{a_k\}$ – ограниченная последовательность, состоящая из натуральных чисел. Может ли число

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}$$

быть рациональным? Обоснуйте свой ответ.

Let $\{a_k\}$ be a bounded sequence consisting of positive integers. Can the number

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}$$

be rational? Explain your answer.

Solution (RUS). Прежде всего заметим, что ряд сходится ввиду ограниченности $\{a_k\}$. Зафиксируем такое целое c, что $c > a_k$ для любого натурального k.

Предположим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} = \frac{p}{q}$ для $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > c$ (мы всегда сможем выбрать такое q, при необходимости домножив p и q на достаточно большое натуральное число). Тогда

$$q! \cdot \left(\frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\right) = n - \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q! \cdot a_k}{k!}$$

для некоторого целого n. Получим

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q! \cdot a_k}{k!} < \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q! \cdot c}{k!} = \frac{c}{q+1} + \frac{c}{(q+1)(q+2)} + \cdots <$$

$$< \frac{c}{q+1} + \frac{c}{(q+1)^2} + \cdots = \frac{c}{q} < 1,$$

т.е. $0 < \sum\limits_{k=q+1}^{\infty} \frac{q! \cdot a_k}{k!} < 1$, откуда $q! \cdot \left(\frac{p}{q} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\right) \notin \mathbb{Z}$, что приводит к противоречию с предположением – а значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}$ иррационально.

Критерии оценивания:

- приведены верные рассуждения и верный ответ: 5 первичных баллов.

Solution (ENG). First of all, note that the series converges due to the boundedness of $\{a_k\}$. Lets fix an integer c such that $c > a_k$ for any positive integer k.

Suppose that $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} = \frac{p}{q}$ for $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > c$ (we can always choose such a q by multiplying p and q by a sufficiently large positive integer). Then

$$q! \cdot \left(\frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\right) = n - \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q! \cdot a_k}{k!}$$

for some integer n. We get

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q! \cdot a_k}{k!} < \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q! \cdot c}{k!} = \frac{c}{q+1} + \frac{c}{(q+1)(q+2)} + \cdots <$$

$$< \frac{c}{q+1} + \frac{c}{(q+1)^2} + \cdots = \frac{c}{q} < 1,$$

thus $0 < \sum\limits_{k=q+1}^{\infty} \frac{q! \cdot a_k}{k!} < 1$, which means $q! \cdot \left(\frac{p}{q} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\right) \notin \mathbb{Z}$, which leads to a contradiction with the assumption – therefore, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}$ is irrational.

Criteria:

- correct reasoning and correct answer are given: 5 pre-points.

Task 10. Для фиксированного натурального n рассмотрим множество $A = \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}$ и пространство S, состоящее из всех функций вида $f : A \to A$, всюду определенных на A.

Функционал – это произвольное отображение $F : S \to S$, определенное на всех функциях из S. Индифферентный функционал – это такой функционал F, что для любых функций $g, h : A \to A$ и любого $k \in A$ имеет место следующее: если $g = h$ на $A \setminus \{k\}$, то $(Fg)(k) = (Fh)(k)$, то есть, неформально говоря, функции (Fg) и (Fh) «вычисляют» свои значения в точке k «игнорируя» или «не зная» значения функций g и h в точке k. Примером индифферентного функционала может служить любой функционал const_m, который все функции из S переводит в функцию-константу $f(x) = m$, $\forall x \in A$, где m – произвольная константа из A.

Приведите пример такого индифферентного функционала F, что для любой функции f из S найдется такое число $k \in A$, что $(Ff)(k) = f(k)$. Обоснуйте свой ответ.

For a fixed positive integer n consider the set $A = \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}$ and the space S of all functions $f : A \to A$ defined for all $k \in A$.

A functional is an arbitrary mapping $F : S \to S$, defined on all functions from S. An indifferent functional is a functional F such that for any functions $g, h : A \to A$ and any $k \in A$ the following holds: if $g = h$ on $A \setminus \{k\}$, then $(Fg)(k) = (Fh)(k)$, that is, informally speaking, the functions (Fg) and (Fh) «calculate» their values at the point k «ignoring» or «not knowing» the values of the functions g and h at point k. An example of an indifferent functional is any functional const_m, which transforms all functions from S into a constant function $f(x) = m$, $\forall x \in A$, while m is an arbitrary constant from A.

Give an example of an indifferent functional F such that for any function f from S there is a number $k \in A$ such that $(Ff)(k) = f(k)$. Explain your answer.

Solution (RUS). Определим функционал F следующим образом: пусть f – произвольная функция из S; для любого $k \in A$ пусть $(Ff)(k) = \Big(k - \sum\limits_{i \in A \setminus \{k\}} f(i)\Big) \pmod n$. По построению F – индифферентный функционал.

Пусть $K = \sum\limits_{i \in A} f(i)$ и $k = K \pmod n$. Тогда

$$(Ff)(k) = \Big(k - \sum_{i \in A \setminus \{k\}} f(i)\Big) \pmod n = \Big(K - \sum_{i \in A \setminus \{k\}} f(i)\Big) \pmod n =$$

$$= \Big(\sum_{i \in A} f(i) - \sum_{i \in A \setminus \{k\}} f(i)\Big) \pmod n = \Big(f(k)\Big) \pmod n = f(k),$$

что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- построен индифферентный функционал: 1 первичный балл;
- построен индифферентный функционал и достигнут существенный прогресс в решении: 3 первичных балла;
- приведено полностью верное решение и дан верный ответ: 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Lets define the functional F as follows: let f be an arbitrary function from S, and for any $k \in A$ let $(Ff)(k) = \Big(k - \sum\limits_{i \in A \setminus \{k\}} f(i)\Big) \pmod{n}$. By construction, F is an indifferent functional.

Let $K = \sum\limits_{i \in A} f(i)$ and $k = K \pmod{n}$. Then

$$(Ff)(k) = \Big(k - \sum_{i \in A \setminus \{k\}} f(i)\Big) \pmod{n} = \Big(K - \sum_{i \in A \setminus \{k\}} f(i)\Big) \pmod{n} =$$

$$= \Big(\sum_{i \in A} f(i) - \sum_{i \in A \setminus \{k\}} f(i)\Big) \pmod{n} = \Big(f(k)\Big) \pmod{n} = f(k),$$

Q.E.D.

Criteria:

- indifferent functional is constructed: 1 pre-point;
- indifferent functional is constructed and significant progress has been made in the solution: 3 pre-points;
- correct solution and correct answer are given: 5 pre-points.